8 класс

8.1. Сравните числа: $A = 2011 \cdot 20122012 \cdot 201320132013$ и $B = 2013 \cdot 20112011 \times \times 201220122012$.

Ответ: $A = B$.

$A = 2011 \cdot 20122012 \cdot 201320132013 = 2011 \cdot 2012 \cdot 10001 \cdot 2013 \cdot 100010001$;
$B = 2013 \cdot 20112011 \cdot 201220122012 = 2013 \cdot 2011 \cdot 10001 \cdot 2012 \cdot 100010001$.
Заметим, что каждое из произведений равно 8146492851648619183716.

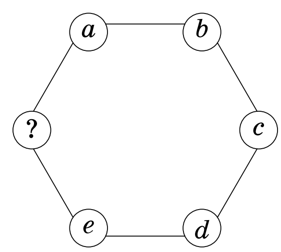
$+$ *полное обоснованное решение (в том числе, и непосредственное вычисление)*
$\mp$ *верный ответ получен разложением на множители, но имеется однотипная вычислительная ошибка (например, неверное количество нулей)*
$-$ *приведен только ответ*

8.2. В формулу линейной функции $y = kx + b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.

Ответ: например, $\boldsymbol{y = 1x + 20}$, $\boldsymbol{y = 2x + 19}$, **...**, $\boldsymbol{y = 10x + 11}$ или $\boldsymbol{y = 1x + 2}$, $\boldsymbol{y = 3x + 4}$, **...**, $\boldsymbol{y = 19x + 20}$.

В первом случае график каждой функции пройдет через точку $(1; 21)$, а во втором случае — через точку $(-1; 1)$.
Возможны и другие примеры.

$+$ *приведен верный ответ и указана точка, через которую проходят все графики*
$\pm$ *приведен верный ответ, но общая точка графиков не указана*
$-$ *приведен неверный ответ*



8.3. Шесть кружков последовательно соединили отрезками. На каждом отрезке записали некоторое число, а в каждом кружке — сумму двух чисел, записанных на входящих в него отрезках. После этого стёрли все числа на отрезках и в одном из кружков (см. рис.). Можно ли найти число, обозначенное знаком вопроса?

Ответ: да, можно.

Раскрасим кружки, чередуя два цвета, например, белый и черный. Тогда каждый отрезок войдет по одному разу в кружок каждого цвета, поэтому сумма чисел в белых кружках будет равна сумме чисел в черных кружках (каждая из них равна сумме всех чисел, которые были записаны на отрезках).

Пусть x — стертое число. Тогда $x + b + d = a + c + e$. Из этого равенства однозначно находится значение x ($x = a + c + e - b - d$).
$+$ *доказано, что стертое число однозначно восстанавливается*
$\mp$ *равенство, из которого можно найти стертое число, указано, но не обосновано*
$-$ *приведен только ответ («можно» или «нельзя»)*

8.4. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE = CD$.

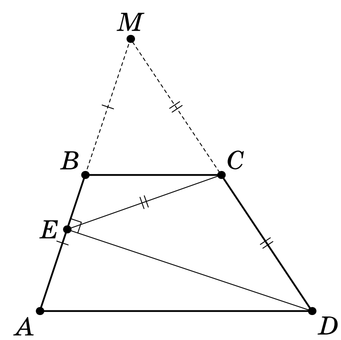


Рис. 8.4а

Первый способ. Продолжим боковые стороны AB и DC до их пересечения в точке M (см. рис. 8.4а). Тогда BC — средняя линия треугольника AMD (так как $BC || AD$ и $BC = 0{,}5AD$). EC — медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника MED, следовательно, $CE = MC = CD$, что и требовалось.

Второй способ. Через вершину C проведем прямую, параллельную AB, которая пересечет AD в точке K, а DE — в точке P (см. рис. 8.4б). Тогда $ABCK$ — параллелограмм, поэтому $BC = AK = KD$. По теореме Фалеса $EP = PD$, то есть CP — медиана треугольника CDE.

Кроме того, $AB \perp DE$, $CP || AB$, значит, $CP \perp DE$, то есть CP — высота треугольника CDE. Так как CP — медиана и высота треугольника CDE, то этот треугольник — равнобедренный: $CE = CD$, что и требовалось.

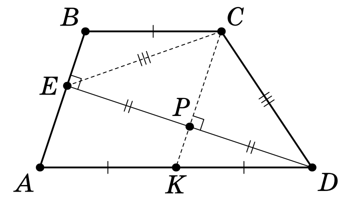


Рис. 8.4б

Существуют и другие способы решения.

+ *полное обоснованное решение*

± *приведено верное доказательство с незначительными пробелами*

∓ *указано одно из возможных дополнительных построений, но доказательство не завершено*

– *приведено неверное рассуждение или доказательство отсутствует*

8.5. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по x очков. Каково наибольшее возможное значение x? (Победа — 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0.)

Ответ: 13.

Оценка. Докажем, что x не может быть больше, чем 13. Действительно, в каждом матче разыграно либо 3 очка (если победила одна из команд), либо 2 очка (если была ничья). Всего было сыграно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ матчей, значит, разыграно не более, чем 135 очков, то есть сумма очков, набранных всеми командами, не больше, чем 135. Таким образом, $10x \leqslant 135$, то есть $x \leqslant 13{,}5$. Так как x — целое число, то $x \leqslant 13$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
A		1	3	3	3	3	0	0	0	0	**13**
B	1		3	3	3	3	0	0	0	0	**13**
C	0	0		1	3	3	3	3	0	0	**13**
D	0	0	1		3	3	3	3	0	0	**13**
E	0	0	0	0		1	3	3	3	3	**13**
F	0	0	0	0	1		3	3	3	3	**13**
G	3	3	0	0	0	0		1	3	3	**13**
H	3	3	0	0	0	0	1		3	3	**13**
I	3	3	3	3	0	0	0	0		1	**13**
K	3	3	3	3	0	0	0	0	1		**13**

Пример. Покажем, что по 13 очков команды набрать могли. Расположим команды по кругу и разобьём их последовательно на 5 пар. Пусть команды каждой пары сыграли между собой вничью, каждая из них выиграла у четырёх команд, следующих за данной парой по часовой стрелке, а остальным командам проиграла. Тогда каждая команда набрала ровно 13 очков.

Аналогичный пример можно предъявить и в виде таблицы.

+ *полное обоснованное решение*

∓ *приведены верный ответ и пример*

∓ *доказано только, что* $x \leqslant 13$.

– *приведен только ответ*

8.6. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

Продлим отрезок MK за точку K на его длину и получим точку P (см. рис. 8.6). Из равенства треугольников BKP и AMK (либо, из того, что $APBM$ — параллелограмм) получим, что $BP = AM$ и $BP || AM$. Так как $BP || AM$, то $BP \perp BN$.

В треугольнике MPN отрезок NK является высотой и медианой, следовательно, этот треугольник — равнобедренный: $NP = MN$.

Таким образом, прямоугольный треугольник NBP — искомый. Действительно, его стороны: $BP = AM$, BN и $NP = MN$.

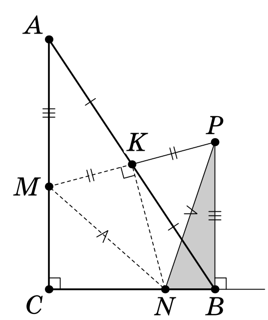


Рис. 8.6

+ *полное обоснованное решение*

∓ *приведено верное построение, но доказательство отсутствует*